

द्विघात समीकरण

जब हम एक द्विघात बहुपद को एक अक्षर के बराबर करते हैं, तो हमें एक द्विघात समीकरण प्राप्त होता है।

$p(x) = k$ के रूप का कोई भी समीकरण, जहाँ $p(x)$ घात 2 का एक बहुपद है, और c एक स्थिरांक है, एक द्विघात समीकरण है।

द्विघात बहुपद

$ax^2 + bx + c$ के रूप का एक बहुपद, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ है, द्विघात बहुपद कहलाता है।

द्विघात समीकरण का मानक रूप

द्विघात समीकरण का मानक रूप $ax^2 + bx + c = 0$ है, जहाँ a, b और c वास्तविक संख्याएँ हैं और $a \neq 0$ हैं। $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

का गुणांक है। इसे द्विघात गुणांक कहते हैं। 'बी' x का गुणांक है। इसे रैखिक गुणांक कहते हैं। 'सी' अक्षर पद है।

गुणनखंडन द्वारा द्विघात समीकरणों को हल करना

द्विघात समीकरण की जड़ें

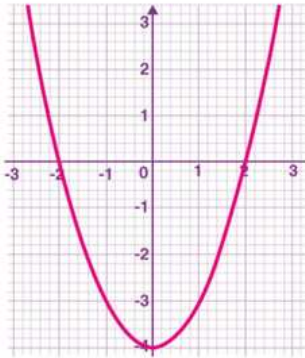
x के वे मान जिनके लिए एक द्विघात समीकरण संतुष्ट होता है, द्विघात समीकरण के मूल कहलाते हैं।

यदि α द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ का मूल है, तो $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$.

एक द्विघात समीकरण में दो अलग-अलग वास्तविक जड़ें हो सकती हैं, दो समान जड़ें हो सकती हैं या वास्तविक जड़ें मौजूद नहीं हो सकती हैं।

ग्राफिक रूप से, द्विघात समीकरण की जड़ें वे बिंदु हैं जहाँ द्विघात बहुपद का ग्राफ एकस-अक्ष को काटता है।

एक द्विघात समीकरण $x^2 - 4 = 0$ के ग्राफ पर विचार करें



द्विघात समीकरण का ग्राफ

उपरोक्त आकृति में, -2 और 2 द्विघात समीकरण $x^2 - 4 = 0$ के मूल हैं।

नोट:

- यदि द्विघात बहुपद का ग्राफ x-अक्ष को दो अलग-अलग बिंदुओं पर काटता है, तो इसकी वास्तविक और अलग जड़ें होती हैं।
- यदि द्विघात बहुपद का ग्राफ x-अक्ष को छूता है, तो इसकी वास्तविक और समान जड़ें होती हैं।
- यदि द्विघात बहुपद का ग्राफ x-अक्ष को काटता या स्पर्श नहीं करता है तो इसका कोई वास्तविक मूल नहीं है।

गुणनखंड विधि द्वारा द्विघात समीकरण को हल करना

एक द्विघात समीकरण $2x^2 - 5x + 3 = 0$ पर विचार करें

$$\Rightarrow 2x^2 - 2x - 3x + 3 = 0$$

यह चरण मध्य पद को विभाजित कर रहा है।

हम दो संख्याओं (-2 और -3) को खोजकर मध्य पद को इस प्रकार विभाजित करते हैं कि उनका योग x के गुणांक के बराबर हो और उनका उत्पाद x^2 के गुणांक और स्थिरांक के उत्पाद के बराबर हो।

$$(-2) + (-3) = (-5)$$

$$\text{और } (-2) \times (-3) = 6$$

$$2x^2 - 2x - 3x + 3 = 0$$

$$2x(x-1) - 3(x-1) = 0$$

$$(x-1)(2x-3)=0$$

इस चरण में, हमने द्विघात बहुपद को उसके गुणखंडों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया है।

इस प्रकार, $x = 1$ और $x = 3/2$ दिए गए द्विघात समीकरण के मूल हैं।

द्विघात समीकरण को हल करने की इस विधि को गुणखंडन विधि कहा जाता है।

वर्ग पूर्ण विधि द्वारा द्विघात समीकरण को हल करना

वर्गों को पूर्ण करने की विधि में द्विघात समीकरण को $(x \pm k)^2 = p^2$ के रूप में व्यक्त किया जाता है।

द्विघात समीकरण $2x^2 - 8x = 10$ पर विचार करें

(i) द्विघात समीकरण को मानक रूप में व्यक्त करें।

$$2x^2 - 8x - 10 = 0$$

(ii) x^2 का गुणांक 1 के बराबर करने के लिए समीकरण को x^2 के गुणांक से विभाजित करें। $x^2 - 4x - 5 = 0$

(iii) $x^2 \pm 2kx + k^2$ के रूप का व्यंजक प्राप्त करने के लिए समीकरण के दोनों पक्षों में x के गुणांक के आधे का वर्ग जोड़ें।

$$(x^2 - 4x + 4) - 5 = 0 + 4$$

(iv) $(x \pm k)^2 = p^2$ $(x-2)^2 = 9$ के रूप का समीकरण प्राप्त करने के लिए उपरोक्त अभिव्यक्ति, $(x \pm k)^2$ को LHS पर अलग करें

(v) धनात्मक और ऋणात्मक वर्गमूल लें।

$$x - 2 = \pm 3$$

$$x = -1 \text{ या } x = 5$$

द्विघात सूत्र का उपयोग करके द्विघात समीकरण को हल करना

द्विघात सूत्र

द्विघात सूत्र का उपयोग समीकरण के मानक रूप से सीधे द्विघात समीकरण के मूल प्राप्त करने के लिए किया जाता है।

द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के लिए,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ए, बी और सी के मानों को प्रतिस्थापित करके, हम सीधे समीकरण की जड़ें प्राप्त कर सकते हैं।

उदाहरण: यदि $x^2 - 5x + 6 = 0$ द्विघात समीकरण है, तो मूल ज्ञात कीजिए।

हल: दिया गया है, $x^2 - 5x + 6 = 0$ द्विघात समीकरण है।

मानक द्विघात समीकरण से तुलना करने पर, हमारे पास है;

$$x^2 + bx + c = 0$$

$$a = 1, b = -5 \text{ और } c = 6$$

तब से,

$$b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \times 1 \times 6 = 25 - 24 = 1 > 0$$

इसलिए, जड़ें वास्तविक हैं।

द्विघात सूत्र का उपयोग करते हुए,

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2(1)}$$

$$= \frac{5 \pm 1}{2}$$

$$\text{यानी } x = \frac{5 + 1}{2} \text{ और } x = \frac{5 - 1}{2}$$

$$\text{एक्स} = 6/2, \text{ एक्स} = 4/2$$

$$\text{एक्स} = 3, 2$$

इसलिए, द्विघात समीकरण के मूल 3 और 2 हैं।

विभेदक

$ax^2 + bx + c = 0$ के रूप के द्विघात समीकरण के लिए, अभिव्यक्ति $b^2 - 4ac$ को द्विघात समीकरण का विभेदक (D द्वारा निरूपित) कहा जाता है।

विवेचक द्विघात समीकरण के गुणांकों के आधार पर द्विघात समीकरण के मूलों की प्रकृति निर्धारित करता है।

जड़ों की प्रकृति

विवेचक के मान, $D = b^2 - 4ac$ के आधार पर, द्विघात समीकरण, $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल तीन प्रकार के हो सकते हैं।

केस 1: यदि $D > 0$, तो समीकरण के दो अलग-अलग वास्तविक मूल हैं।

केस 2: यदि $D = 0$ है, तो समीकरण के दो समान वास्तविक मूल हैं।

केस 3: यदि $D < 0$ है, तो समीकरण का कोई वास्तविक मूल नहीं है।

$D > 0$ होने पर द्विघात सूत्र का उपयोग करके हल करना

द्विघात सूत्र का उपयोग करके $2x^2 - 7x + 3 = 0$ को हल करें।

(i) द्विघात समीकरण के गुणांकों को पहचानें। $a = 2$, $b = -7$, $c = 3$

(ii) विवेचक, $b^2 - 4ac$ की गणना करें

$$D = (-7)^2 - 4 \times 2 \times 3 = 49 - 24 = 25$$

$D > 0$, इसलिए, जड़ें अलग हैं।

(iii) मूल ज्ञात करने के लिए द्विघात सूत्र में गुणांकों को प्रतिस्थापित करें

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{((-7)^2 - 4(2)(3))}}{2(2)}$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{4}$$

$x = 3$ और $x = 1/2$ मूल हैं।

$D = 0$ होने पर द्विघात समीकरण को हल करना

आइए द्विघात समीकरण $3x^2 - 2x + 1/3 = 0$ का एक उदाहरण लें।

यहाँ, $a = 3$, $b = -2$ और $c = 1/3$

$$\text{सारणिक, } D = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(3)(1/3)$$

$$= 4 - 4$$

$$= 0$$

इस प्रकार, दिए गए समीकरण के मूल समान हैं।

अतः मूल $-b/2a$ और $-b/2a$ हैं, अर्थात् $1/3$ और $1/3$ ।

द्विघात समीकरण को हल करना

मान लीजिए कि द्विघात समीकरण $4x^2 + 3x + 5 = 0$ है

द्विघात समीकरण के मानक रूप से तुलना करने पर, $ax^2 + bx + c = 0$,

$a = 4$, $b = 3$, $c = 5$

सारणिक के सूत्र से हम जानते हैं;

$$\text{निर्धारक (डी)} = \text{बी}^2 - 4ac$$

$$= (3)^2 - 4(4)(5)$$

$$= 9 - 80$$

$$= -71^2 - 4ac)/2a$$

$$= [-3 \pm \sqrt{(-71)}]/2(4)$$

$$= [-3 \pm \sqrt{(71)}]/8$$

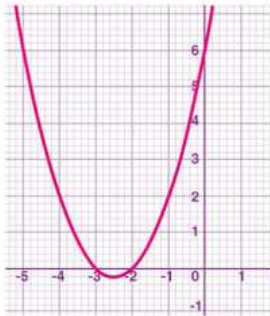
$$= (-3 \pm \sqrt{71})/8$$

इस प्रकार, समीकरण की गैर-वास्तविक जड़ें $x = (-3 + \sqrt{71})/8$ और $x = (-3 - \sqrt{71})/8$ हैं।

द्विघात समीकरण का आलेखीय निरूपण

द्विघात बहुपद का ग्राफ एक परवलय होता है। द्विघात समीकरण के मूल वे बिंदु होते हैं जहां परवलय x-अक्ष को काटता है अर्थात् वे बिंदु जहां द्विघात बहुपद का मान शून्य होता है।

अब, $x^2 + 5x + 6 = 0$ का ग्राफ है:

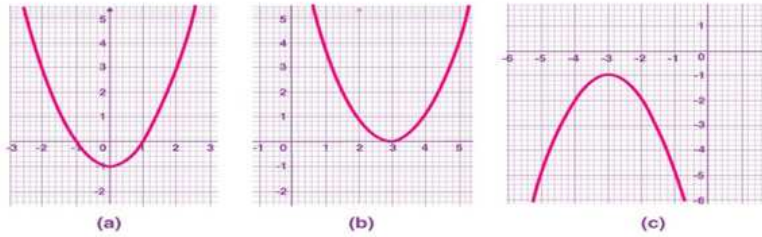


उपरोक्त आकृति में, -2 और -3 द्विघात समीकरण $x^2 + 5x + 6 = 0$ के मूल हैं।

एक द्विघात बहुपद $ax^2 + bx + c$ के लिए,

यदि $a > 0$, तो परवलय ऊपर की ओर खुलता है।

यदि $a^2 - 4ac$



D के विभिन्न मानों के लिए ग्राफ की प्रकृति।

यदि $D > 0$ है, तो परवलय x-अक्ष को बिल्कुल दो अलग-अलग बिंदुओं पर काटता है। जड़ें अलग हैं। यह मामला उपरोक्त चित्र में दिखाया गया है, जहां द्विघात बहुपद x-अक्ष को दो अलग-अलग बिंदुओं पर काटता है।

यदि $D = 0$ है, तो परवलय केवल एक बिंदु पर x-अक्ष को छूता है और शेष परवलय x-अक्ष के ऊपर या नीचे स्थित होता है। इस मामले में, जड़ें बराबर हैं। यह मामला उपरोक्त चित्र में b में दिखाया गया है, जहां द्विघात बहुपद केवल एक बिंदु पर x-अक्ष को छूता है।

यदि $D < 0$ है, तो परवलय पूरी तरह से x-अक्ष के ऊपर या नीचे स्थित होता है और x-अक्ष के साथ संपर्क का कोई बिंदु नहीं होता है। इस मामले में, कोई वास्तविक जड़ें नहीं हैं। यह मामला उपरोक्त चित्र में c में दिखाया गया है, जहां द्विघात बहुपद न तो x-अक्ष को काटता है और न ही स्पर्श करता है।

इसके मूलों से द्विघात समीकरण का निर्माण

जब मूल दिए गए हों तो द्विघात समीकरण का मानक रूप जानने के लिए:

मान लीजिए α और β द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं। तब,

$$(x - \alpha)(x - \beta) = 0$$

विस्तार करने पर, हमें मिलता है,

$$x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0, \text{ जो द्विघात समीकरण का मानक रूप है।}$$

$$\text{यहाँ, } a=1, b=-(\alpha + \beta) \text{ और } c=\alpha\beta।$$

उदाहरण: यदि मूल -3 और 4 हैं तो द्विघात समीकरण बनाएं।

समाधान: दिए गए -3 और 4 समीकरण के मूल हैं।

$$\text{जड़ों का योग} = -3 + 4 = 1$$

$$\text{जड़ों का गुणनफल} = (-3) \cdot (4) = -12$$

जैसा कि हम जानते हैं, द्विघात समीकरण का मानक रूप है:

$$x^2 - (\text{मूलों का योग})x + (\text{मूलों का गुणनफल}) = 0$$

अतः मान लगाने पर हमें प्राप्त होता है

$$x^2 - x - 12 = 0$$

जो आवश्यक द्विघात समीकरण है.

द्विघात समीकरण के मूलों का योग और गुणनफल

मान लीजिए α और β द्विघात समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ के मूल हैं। तब,

$$\text{जड़ों का योग} = \alpha + \beta = -b/a$$

$$\text{जड़ों का गुणनफल} = \alpha\beta = c/a$$

उदाहरण: दिया गया है, $x^2 - 5x + 8 = 0$ द्विघात समीकरण है। इसके मूलों का योग और गुणनफल ज्ञात कीजिए।

समाधान: $x^2 - 5x + 8 = 0$, $ax^2 + bx + c = 0$ के रूप में दिया गया द्विघात समीकरण है।
इसलिए,

$$a = 1$$

$$b = -5$$

$$c = 8$$

$$\text{जड़ों का योग} = -b/a = 5$$

$$\text{जड़ों का गुणनफल} = c/a = 8$$

Exercise

1. यदि द्विघात समीकरण $P(x) = 2x^2 + 3x - 4 = 0$ के शून्यक α तथा β हो, तो $\alpha + \beta$ का मान होगा:

- A. $-2/3$
- B. -2
- C. 2
- D. $-3/2$

2. यदि α तथा β द्विघात समीकरण $x^2 + x - 2 = 0$ के मूल हो, तो $1/\alpha + 1/\beta$ का मान होगा:

- A. $1/2$
- B. $-1/\sqrt{2}$
- C. 1
- D. 2

3. निम्नलिखित में कौन द्विघात समीकरण नहीं है?

- A. $(x + 1)(x - 2) = 0$
- B. $2x^2 - 7x = 0$
- C. $x + 3/x = x^2$
- D. $x^2 - 9 = 0$

4. निम्नलिखित में से कौन - सा द्विघात समीकरण है?

- A. $2x^2 - 3x = (x + 1)^2$
- B. $x^2 - 2\sqrt{x} + 3 = 0$
- C. $3x^2 + 2 = (3 - x)^2 + 4$
- D. $x^2 - 1/x^2 = 4$

5. यदि द्विघात समीकरण $x^2 - px + 4 = 0$ के मूल बराबर हों तो $p = ?$

- A. ± 3
- B. ± 4
- C. ± 5
- D. ± 2

Answer Key

1. D

2. A

3. C

4. C

5. B

